

УДК 621.983.07:669.017

УДК 620.22.-419.8:539.3

Титов В. А.  
Злочевская Н. К.  
Алексеев О. В.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТРУКТУРЫ

Теоретический анализ процессов деформирования композиционных и квазикомпозиционных материалов (КМ) при изготовлении конструкций имеет ряд трудностей, обусловленных многообразием видов их полуфабрикатов и форм армирующих компонент, их механических, физических и прочих характеристик. Такое многообразие определяет в каждом отдельном случае свои подходы к расчету процессов деформирования композитов.

Целью данной работы является анализ процессов пластического деформирования композитов, а также определение напряженно-деформированного состояния слоистых, волокнистых слоисто-волокнистых и дисперсноупрачненных структур.

1. Существующие подходы к теоретическому анализу процессов деформирования композитов

В теоретическом анализе процессов деформирования композитов к настоящему времени сложились три основных подхода – феноменологический, структурный, структурно-феноменологический, представляющий комбинацию предыдущих двух подходов.

Феноменологический подход традиционно используют при теоретическом анализе процессов деформирования однородных, гомогенных материалов [1, 2, 3]. Его суть состоит в том, что свойства реального деформируемого тела (множества  $M$ , материальных точек  $m_i$ ) схематизируют настолько, насколько это необходимо и допустимо, чтобы, с одной стороны, получить возможность достаточно простыми средствами решить задачу, а с другой стороны, отразить в этой схеме все наиболее важные черты рассматриваемого тела [4, 5].

Теория деформирования КМ также может быть построена в рамках феноменологического подхода [6, 7]. Для этого композиционной среде ставится в соответствие однородная деформируемая среда, для которой устанавливается связь между тензорами напряжений  $\sigma_{ij}$  – и деформаций  $e_{ij}$  в виде:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(e_{kl}), \quad (1)$$

где  $F_{ij}$  – симметричный тензор-оператор второго ранга, с помощью которого в каждый фиксированный момент времени  $t_0$  тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  однозначно определяется значениями тензора деформаций  $e_{kl}$ , известными во все времена, предшествующие моменту  $t$ :  $t_i \leq t_0$ . Если для определения  $\sigma_{ij}$  тензора напряжений достаточно знать тензор деформаций только в момент времени  $t_0$ , то оператор  $F_{ij}$  является функцией  $F$ .

Константы тензоров усредненных напряжений и деформаций выражаются в общем виде зависимостями:

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{g} \int \sigma_{ij} d\mathcal{G}; e_{ij}^* = \frac{1}{g} \int e_{ij} d\mathcal{G}, \quad (2)$$

где  $\mathcal{G}$  – область усреднения характеристик.

Свойства представленной макросреды определяет связь между макронапряжениями и макродеформациями:

$$\sigma_{ij}^* = F_{ij}(e_{ij}^*). \quad (3)$$

Переход от структурных характеристик деформирования (на микроуровне) к макроскопическим (эффективным) целесообразно осуществить, используя понятие элементарного или представительного макрообъема. Это позволяет представить КМ с детерминированной структурой как макроскопически однородное или квазиоднородное тело.

В качестве представительного объема выбирается подобласть с характерным конечным размером, подчиняющимся условию:

$$L \gg \ell > \ell_\beta,$$

где  $L$  – размер заготовки;  $\ell_\beta$  – размер односвязного структурного компонента  $\beta$ .

Одновременно с этим непрерывная внутри подобласти функция усреднения характеристик НДС  $g(x_j)$  должна подчиняться следующим условиям:

существования и ограничения величины в рассматриваемом макрообъеме:

$$g^* = \frac{1}{\mathcal{G}_\theta} \int g(x_j) d\mathcal{G}.$$

Для произвольно выбранных двух представительных объемов должно выполняться соотношение:

$$\left| 1 - \frac{\frac{1}{\mathcal{G}_k^\theta} \int g(x_j) d\mathcal{G}}{\frac{1}{\mathcal{G}_m^\theta} \int g(x_j) d\mathcal{G}} \right| \leq \delta, \quad (4)$$

где  $\delta$  – произвольное бесконечно малое число;  $x_j$  – параметры в выбранной системе координат.

Примером представительного объема может служить прямоугольная ячейка, содержащая волокно, для КМ с равномерным расположением упрочняющих волокон (детерминированной структурой).

Константы (или функции), которые полностью определяет оператор  $F$ , устанавливают экспериментально.

Существенным недостатком феноменологических моделей при изучении механики деформирования композитов является то, что даже при незначительном изменении структуры материала (расположения и формы компонент), объемного содержания структурных компонент и их свойств, меняется функция  $F$ . В этом случае для каждого конкретного материала приходится проводить установочную серию экспериментов.

Наряду с этим функциональная связь изменяется также при изменении условий нагружения, поэтому в общем случае она зависит от ряда других технологических параметров: температуры деформирования, скорости деформаций и др. В случае необходимости учета этих параметров на основании установочной серии экспериментов могут быть построены более общие функциональные зависимости вида:

$$\sigma_i = f(e_i, \nu_k, \tau, \varepsilon, \dots). \quad (5)$$

Такая зависимость представляет гиперповерхность, а использование ее для практических расчетов неудобно. В этом случае для каждого конкретного рассматриваемых параметров используют зависимости, как правило, имеющие не более двух переменных параметров, принимая во внимание, что остальные параметры постоянны для данного процесса.

Как показывают результаты решения практических задач в феноменологической постановке [8, 9], такой подход обеспечивает получение основных силовых и энергетических параметров процесса на основании усредненных характеристик напряженно-деформированного состояния. Он не дает возможность получать истинное распределение напряжений и деформаций, возникающих в каждом из компонентов деформируемого композиционного тела.

В связи с этим в механике композиционных материалов используют структурный подход, в рамках которого композиционный материал рассматривается как неоднородная среда [7, 10]. Свойства компонентов структуры, которые считаются однородными, задаются соотношениями (1). Тогда определяющие функции для неоднородной среды можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{pq} = F_{pq} \left( q_{(i)kl}(\mathbf{r}), e_{kl}(\mathbf{r}) \right), \quad (6)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, устанавливающий связь с точкой среды в выбранной системе координат,  $\mathbf{r} \in M_\gamma$ ;

$q_{kl}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n q_{kl}^{(i)} \lambda_{(r)}^{(i)}$  – кусочно-непрерывная функция, определяющая компоненты композита;

$\lambda_{(r)}$  – индикаторная функция, определяемая выражением:

$$\lambda_{(r)}^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{r} \in V_i, \\ 0, & \text{если } \mathbf{r} \notin V_i, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_{(r)}^{(i)} = 1.$$

В этом случае материальные функции (6) для КМ являются разрывными кусочно-постоянными функциями координат. Области, в которых определяющие соотношения непрерывны по координате, называются компонентами композита. Соотношение (6), учитывающее полную информацию о структуре материального тела  $M_\gamma$  и феноменологические модели компонентов, представляет собой математическую модель структурно-неоднородной (композиционной) среды.

Такой подход позволяет исследовать истинное напряженно-деформированное состояние деформируемого тела. Однако его использование для сложно-армированных композитов вызывает технические трудности, связанные с большим объемом расчетных работ.

Поэтому структурный подход используют, как правило, для расчета слоистых структур [11–15]. Для сложных структур КМ используют комбинированные подходы, одним из которых является структурно-феноменологический подход. Такой подход включает все положительные черты описанных выше подходов.

Ряд исследователей [7, 16, 17] для расчета практических задач использовали прямой структурно-феноменологический подход, включающий:

- исследование области деформирования в феноменологической постановке;
- выделение представительного объема с наложением граничных условий в виде напряжений или деформаций, которые определяются на первом этапе;
- решение задачи деформирования представительного объема в структурной постановке.

Такой подход позволяет оценить напряженно-деформированное состояние в интересующей области и на основании этого дать заключение об устойчивости протекания деформаций.

Использование такого подхода ограничено, когда композит имеет неравномерное по объему распределение армирующих компонентов.

В задачи настоящей работы входит определение наиболее общих подходов к описанию структуры композитов для использования их совместно с методами механики сплошных сред. Для этого рассмотрим общие свойства композитов, которые не изменяются в зависимости от изменения размеров, форм компонентов, их физико-механических свойств, деформаций при формоизменении. Это позволяет выявить топологический анализ, который описывает свойства, зависящие от взаимного расположения компонент.

Применение топологического анализа к задачам деформирования композитов позволяет выявить наиболее общие виды структур, обуславливающие сведение всего многообразия процессов деформирования к оптимальному, сформировать общий подход к их решению.

## 2. Топологическое представление композитов в механике сплошных сред

Рассматриваемое в процессе деформирования тело может быть представлено как материальный объем, образуемый множеством  $M$  материальных точек  $m$ . При этом каждой материальной точке соответствует пространственное положение  $n_i$  пространственного множества  $N$ .

Ограниченное множество материальных точек  $m_k$ , объединенное конечной совокупностью свойств  $P_\gamma$ , непрерывно занимающее объем  $M_\gamma$ , называется сплошным материальным телом  $\gamma$  – среды.

Сплошное материальное тело может быть сложным и представляется объединением конечных множеств сплошных тел  $M_{ai}$ , характеризующихся индивидуальной конечной совокупностью свойств, зависящих от свойств  $P_{ai}$  составляющих множеств  $M_{ai}$ :

$$M_\gamma = \bigcup_{i=1}^k M_i . \quad (7)$$

Если  $i = 1$ , то тело имеет однородный состав материальных частиц, а также свойств и называется моносредой или гомогенным (однородным) материалом. Если  $i > 1$ , то сплошное тело представляет собой полисреду и может быть названо композиционным материалом.

Необходимо отметить определенную условность приведенной терминологии, так как в зависимости от масштабного фактора рассмотренные структуры тела, описываемые полисредой, могут быть отнесены к гомогенному или композиционному материалу.

Процесс деформирования тела  $M_\gamma$  является результатом его взаимодействия со средой  $R$ , являющейся частью пустого пространства  $\emptyset = R / N$ .

Пренебрегая процессами, протекающими в среде  $R$ , представим ее значимое влияние на исследуемое тело внешним воздействием  $\Sigma$ , где  $S_\gamma$  – граница тела  $M_\gamma$ .

Допущение о конечной совокупности свойств сплошных сред позволяет считать, что между  $\alpha$ -средой и  $\beta$ -средой тела  $M$  обозначена четкая граница  $S_{\alpha\beta}$ . Граничной точкой тела  $M$  называется такая точка  $S$ , которая не принадлежит телу  $M$ :

$$S \in / \equiv M ,$$

но в любой окрестности, в которой есть точки этого тела. Совокупность граничных точек тела  $M$  образует его границу  $S$ .

Так в двухкомпонентном композиционном теле, имеющем две области –  $M_\alpha$  и  $M_\beta$ , вся граница компонента тела  $M_\alpha$  будет равна:

$$S_{\alpha} = \bigcup_{\gamma}^k S_{\alpha\gamma}. \quad (8)$$

Вся граница сложного тела  $M_{\gamma}$  включает ряд участков, из которых различают основные:  
– границы между составляющими компонентами  $M_{\alpha}$  и  $M_{\beta}$ , которые можно рассматривать как пересечение замкнутых пространств  $\overline{N}_{\alpha}$  и  $\overline{N}_{\beta}$ , соответствующих этим телам:

$$S_{\alpha\beta} = \overline{N}_{\alpha} \cap \overline{N}_{\beta}; \quad (9)$$

– границы внешнего воздействия:

$$S_{\Sigma\beta} = \overline{\emptyset} \cap \overline{N}_{\alpha}. \quad (10)$$

Участок  $S_{0\alpha}$  границы  $S_{\Sigma\beta}$ , где внешнее воздействие малозначительно, называется свободной границей.

Приведенное топологическое представление сплошных тел позволяет свести все многообразие структур композиционных сред к двум основным типам. К первому из них относятся среды, в которых минимум одна из компонентов окружена со всех сторон другим компонентом. Ко второму типу относятся среды, компоненты которых имеют общую границу друг с другом и, кроме этого, с внешней средой.

Если в сплошной композиционной среде:

$$M_{\gamma} = M_{\alpha} \cup M_{\beta}, \quad (11)$$

тело  $M_{\alpha}$  таково, что его граница:

$$S_{\alpha} = S_{\gamma} \cup S_{\alpha\beta}, \quad (12)$$

а граница тела  $M_{\beta}$  удовлетворяет условию:

$$S_{\alpha\beta} \equiv / \supset S_{\gamma}, \quad (13)$$

то тело  $M_{\alpha}$  называют окружением или матрицей, а тело  $M_{\beta}$  – внедрением или армирующим компонентом.

Армирующий компонент типа  $M_{\beta}$  определен односвязной областью пространства  $N_{\beta}$ . Для этого компонента граница области  $M_{\beta}$  также считается односвязной, т. к. она содержит только поверхность соприкосновения с матричным компонентом  $M_{\alpha}$ . В этом случае понятие односвязности заключается в том, что любую замкнутую линию, принадлежащую этой области, можно стянуть в точку, не выходя из этой области.

В среде  $M_{\gamma}$  рассмотренного композиционного материала может содержаться произвольное количество односвязных армирующих компонент, отличающихся как размерами, так и свойствами. При этом:

$$M_i \equiv / \cap M_{i+1}. \quad (14)$$

Рассмотрим композиционную среду, определяемую соотношением (7):

$$S_i = S_{ji} \cup S_{i\ell} \cup S_{i\gamma} \cup S_{\Sigma i\gamma}, \quad (15)$$

где  $S_{ij}$  и  $S_{il}$  – границы поверхности материала в области с областями  $M_j$  и  $M_l$ ;

$S_i$  и  $S_{i\gamma}$  – соответственно свободная поверхность и поверхность внешнего воздействия  $M_i$ , совпадающая с композиционным телом  $M_j$ .

Если в рассматриваемой среде имеются поверхности  $S_{i\gamma}$  и  $S_{\Sigma i\gamma}$ , совпадающие с границей композиции тела, то выход отдельных компонент  $M_i$  на поверхность тела  $M_\gamma$  определяет  $M_i$  как слой тела  $M_\gamma$ . При этом считают, что соседние, граничащие с телом  $M_i$ , слои  $M_j$  и  $M_\ell$  не пересекаются:

$$M_j \equiv / \cap M_\ell; \tag{16}$$

и, как правило, не объединяются:

$$M_j \equiv / \cup M_\ell. \tag{17}$$

Тогда материал, обладающий свойствами (7), (15), (16), и (17), является слоистым материалом.

Если композиционная сложная среда включает в себя области с многосвязными и односвязными компонентами, она имеет комбинированную структуру.

Топологический анализ показывает, что в зависимости от особенностей структуры исследуемого сплошного тела в процессах деформирования, можно рассматривать моно- и полисреды. Моносреда описывает многообразие гомогенных материалов. Полисреды могут описывать материалы сложной структуры, в том числе КМ. По основным топологическим признакам полисреды подразделяются на односвязные и многосвязные структуры, что в рассматриваемых классах композитов и в их характерных сечениях соответствует дисперсноупрочненным или волокнистым и слоистым структурам композитов. В табл. 1 приведено топологическое представление основных типов КМ по главным плоскостям сечений, позволяющее типизовать многообразие структур КМ, сводя их к двум основным топологическим моделям, соответствующих рассматриваемому сечению деформируемого тела.

Таблица 1

Технологическое представление двухкомпонентных КМ и гомогенного материала

Тип материала	Схема элементарного объема	Главные плоскости сечения		
		103	203	102
Дисперсно-армированный КМ		$M_\gamma = M_\alpha \cup M_\beta;$ $S_\alpha = S_\gamma \cup_j^k S_{\alpha\beta j};$ $S_{\alpha\beta j} = / \supset S_\gamma;$		
КМ, армированные непрерывными волокнами				
Каркасно-армированные КМ			$M_\gamma = M_\alpha \cup M_\beta;$ $S_\gamma = S_{\alpha\gamma} \cup S_{\beta\gamma};$ $S_{\alpha\beta} = / \cup S_\gamma;$ $M_\alpha = / \cap M_\beta;$	
Слоистые				
Гомогенные		$M_\gamma = \begin{cases} M_\alpha; M_\beta = 0; \\ M_\alpha = 0; M_\beta; \end{cases} S_{\alpha\beta} = 0$		

Очевидно, что как для гомогенного, так и для композиционного тела, результатом внешнего силового воздействия является изменение формы и границ тела ( $S_\gamma$ ). При этом для композиционного тела характерно изменение формы и границ его компонентов ( $S_i$ ). Это изменение зависит от первоначальной формы компонентов и их физико-механических свойств. Топологическое представление позволяет типизовать и описать структуру КМ. Для моделирования поведения КМ при деформировании необходимо выработать адекватное типизованному топологическому представлению физическое описание материала. При этом могут использоваться два основных подхода – феноменологический и структурный.

### 3. Моделирование процессов пластического деформирования композитов в представлении слоисто-неоднородного тела

Топологическое представление о композиционных материалах дает возможность выработать обобщенную систему расчета процессов их деформирования. При этом следует учесть следующие допущения:

во-первых, рассматриваемые классы композитов (слоистые – биметаллы; слоисто-волоконистые – алюминий-бор, алюминий-сталь и др. с гомогенными плакирующими, технологическими или конструктивными слоями, металлополимерные слоистые КМ; волоконистые) имеют, как правило, детерминированную структуру;

во-вторых, детерминированная структура композитов (в частности волоконистых типа алюминий-бор – как наиболее сложных) имеет достаточно четкое распределение групп (областей) армирующих компонентов в теле композита, которое можно разделить по толщине образца на отдельные слои постоянной толщины. Это обусловлено технологией их получения при изготовлении листовых полуфабрикатов;

в-третьих, для полимерных слоев металлополимерных слоистых КМ, которые могут иметь неравномерную (стохастическую) укладку волокон в силу возможных перемещений гибких волокон при компактировании и полимеризации, учитывая незначительную толщину волоконного слоя (в 6–8 и более раз меньшую, чем толщина всего листа), считаем структуру «квазидетерминированной».

Принятые допущения позволяют разделить деформированную область рассматриваемых классов композитов на отдельные слои, равномерные по толщине пакета. Такая структуризация, обеспечивающая рассмотрение отдельных простых по форме областей композита, упрощает дальнейший расчет композита в целом. При этом каждый из выделенных (или условно выделенных) слоев композита можно рассматривать в рамках сложившегося феноменологического подхода. Так, для армированных слоев используют при описании деформационных свойств эффективные характеристики напряжений и деформаций, а для гомогенных – их реальные механические свойства.

Таким образом, суть разработанной системы расчета заключается в следующем (рис. 1) – композит рассматриваемой структуры приводится к слоистому, имеющему отдельные жестко взаимосвязанные условные или реальные слои. Для каждого из слоев устанавливаются на основании постановочных экспериментов или аналитического расчета, феноменологические свойства. Выполняют расчет процесса деформирования композита слоистой (упрощенной) структуры с учетом всех известных технологических факторов. При необходимости, выделяют представительный объем в рассматриваемом слое композита и, на основании установленных для него на предыдущем этапе расчета граничных параметров, выполняют расчет НДС в этом объеме. Определяют необходимые технологические параметры процессов деформирования.

На последующем этапе, полученные данные о напряженно-деформированном состоянии деформируемого композита позволяют определить технологические параметры процесса пластического формообразования элемента конструкции.

Задача упругого восстановления деформированной заготовки (пружинения) решается также в несколько этапов – устанавливаются геометрические параметры пружинения заготовки композита, представленного в виде слоистого тела, с использованием феноменологических характеристик материалов. Величина остаточных напряжений и деформаций в отдельных слоях решается при рассмотрении представительного объема, выделенного в данном слое.

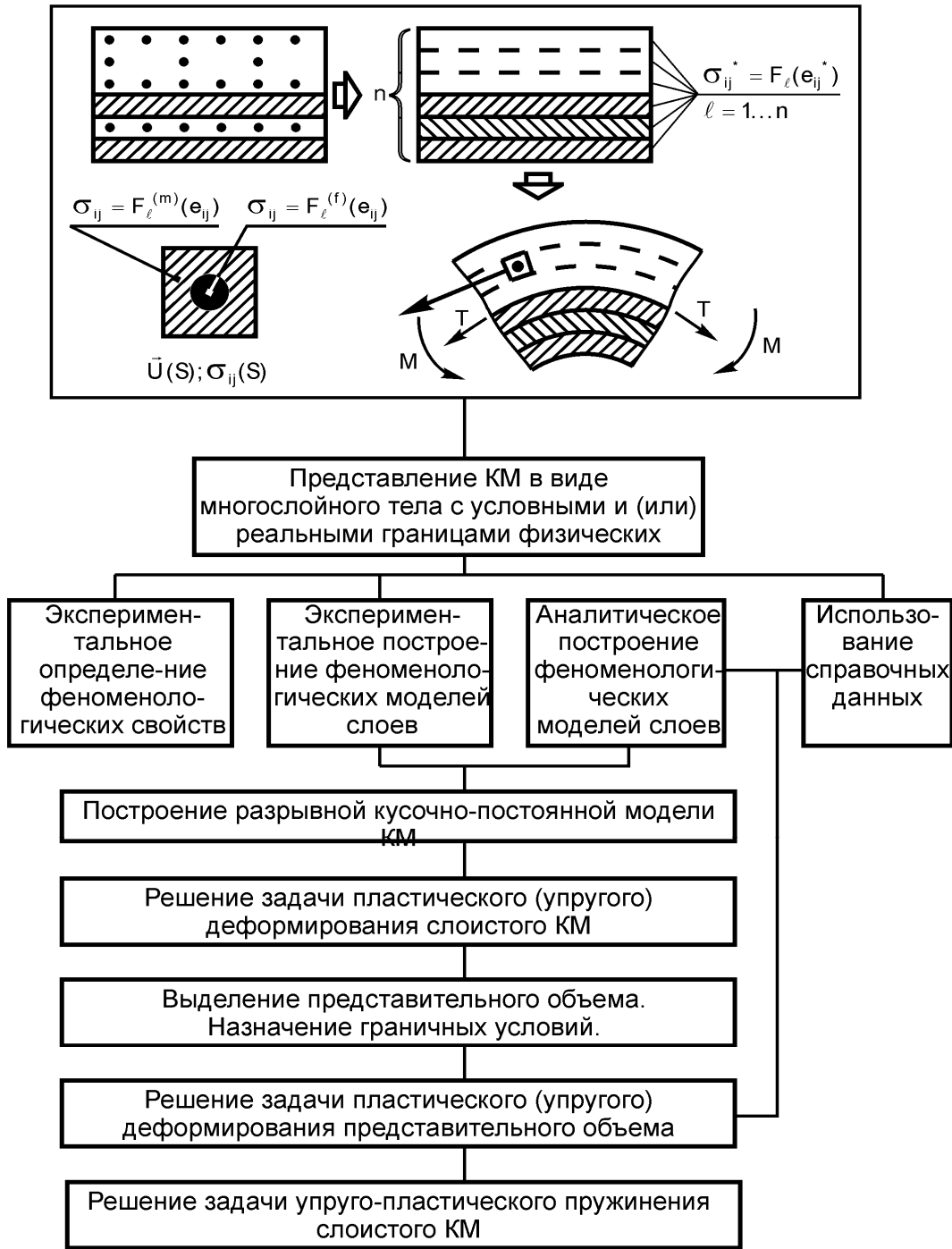


Рис. 1. Структурная схема расчета KM в виде слоистого неоднородного тела

### ВЫВОДЫ

1. В результате обобщения сложившихся подходов к моделированию процессов пластического деформирования композитов и их топологического анализа предложена система расчета KM в представлении слоисто-неоднородного тела.



2. Использование предложенного подхода позволяет определять НДС для процессов деформирования и после снятия деформирующей нагрузки в макро- и микрообъемах деформируемого КМ слоистых, волокнистых слоисто-волокнистых и дисперсноупрачненных структур.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Ю. Н. Введение в теорию обработки металлов давлением, прокаткой и резанием / Ю. Н. Алексеев. – Харьков : ХГУ, 1969. – 108 с.
2. Ильющин А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильющин. – М. : МГУ, 1971. – 247 с.
3. Томсен Э. Механика пластических деформаций при обработке металлов / Э. Томсен, Ч. Янг, Ш. Кобояши, Е. П. Чиксова. – М. : Машиностроение, 1969. – 503 с.
4. Бахвалов Н. С. Осреднение процессов в периодических средах / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. – М. : Наука, 1984. – 352 с.
5. Евстратов В. А. Теория обработки металлов давлением / В. А. Евстратов. – Харьков : Вища школа, 1981. – 248 с.
6. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. – М. : МГУ, 1984. – 336 с.
7. Анциферов В. Н. Волокнистые композиционные материалы на основе титана / В. Н. Анциферов и др. – М. : Наука, 1989. – 136 с.
8. Бузинов С. В. Гибка волокнистого композиционного материала с наложением сжимающих напряжений / С. В. Бузинов, А. Л. Воронков // Изв. вузов. – 1982. – № 9. – С. 151–154. – (Сер. : «Машиностроение»).
9. Грибков А. Н. Особенности деформации металлических композитов с хрупким волокном при гибке / А. Н. Грибко, Н. В. Орлов // Порошковая металлургия. – 1982. – № 11. – С. 80–85.
10. Соколкин Ю. В. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел / Ю. В. Соколкин, А. А. Ташиников. – М. : Наука, 1984. – 116 с.
11. Васильев В. В. Композиционные материалы : справочник / ред. совет : В. Д. Протасов, В. В. Болотин, В. Ф. Мануйлов (предс.) и др. ; под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М. : Машиностроение, 1990. – 512 с.
12. Аркулис Г. Э. Совместная пластическая деформация разных металлов / Г. Э. Аркулис. – М. : Металлургия, 1964. – 271 с.
13. Гузя А. Н. Механика композитов: справочник. В 12 т. Т. 3 Статистическая механика и эффективные свойства материалов / под. ред. А. П. Хорошуна ; под общей ред. А. Н. Гузя. – Киев : Наукова думка, 1993. – 390 с.
14. Титов В. А. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных металлов в процессе изгиба / В. А. Титов, О. Н. Огурек // Молодые специалисты Украинского филиала в научно-техническом прогресс. – М., НИИТ, 1984, С. 35–41.
15. Титов В. А. Особенности упруго-пластического поведения металлов при изгибе / В. А. Титов // Прогресивна техніка і технологія машинобудування і зварювального виробництва. Т. 2. – Київ, НТУУ «КПІ», 1998. – С. 332–336.
16. Колпашиников А. И. Деформирование композиционных материалов / А. И. Колпашиников, Б. А. Арефьев, В. Ф. Мануйлов. – М. : Металлургия, 1982. – 248 с.
17. Мануйлов В. Ф. Расчеты процессов деформации композиционных материалов / В. Ф. Мануйлов, В. Н. Смирнов, В. И. Галкин. – М. : Металлургия, 1992. – 208 с.

Титов В. А. – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой НТУУ «КПИ»;  
Злочевская Н. К. – аспирант НТУУ «КПИ»;  
Алексеев О. В. – ст. преп. ЗНТУ.

НТУУ «КПИ» – Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев;  
ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.

E-mail: v.a.titov@list.ru